

1

Άλγεβρα^{1.2}

Ταυτότητες

Τετράγωνο Αθροίσματος – Διαφοράς

1. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα :

α. $(\alpha + 3)^2$

β. $(10 + \kappa)^2$

γ. $(\mu - 4)^2$

δ. $(4 - x)^2$

ε. $(\alpha + 2\beta)^2$

στ. $(6\kappa - 5)^2$

ζ. $(3\alpha + 4\beta)^2$

η. $(2\alpha - 7\beta)^2$

θ. $(-\alpha - \beta)^2$

ι. $(-x + y)^2$

2. Ομοίως :

α. $(\alpha + \frac{1}{2}\beta)^2$

β. $(x + \frac{1}{x})^2$

γ. $(-\psi + 5\chi)^2$

δ. $(-3\alpha - 7\beta)^2$

ε. $(-\frac{1}{2}x - y)^2$

στ. $(-\frac{1}{2}xy + y)^2$

ζ. $(\alpha^2 + \beta)^2$

η. $(-x^2 + xy)^2$

θ. $(-2xy + x^2y)^2$

ι. $(\alpha - \beta^3)^2$

$$\text{ια. } (x^2 - y^3)^2$$

$$\text{ιβ. } (3a^2 + 4ab)^2$$

$$\text{ιγ. } (x^3 + 3xy^2)^2$$

$$\text{ιδ. } (x^v - y^v)^2$$

$$\text{ιε. } \left(\frac{2}{3}x + y\right)^2$$

$$\text{ιστ. } \left(x^2 + \frac{1}{2}y^3\right)^2$$

$$\text{ιζ. } \left(\frac{2}{5}x - 2y\right)^2$$

$$\text{ιη. } \left(x^2 - \frac{2}{3}\right)^2$$

$$\text{ιθ. } \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}y^3\right)^2$$

$$\text{κ. } (x - \sqrt{3})^2$$

$$\text{κα. } (\sqrt{2x} - \sqrt{5y})^2$$

$$\text{κβ. } \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{5}} - \beta\sqrt{5}\right)^2$$

$$\text{κγ. } \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{7y}{12}\right)^2$$

Κύβος Αθροίσματος – Διαφοράς

3. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα :

$$\text{α. } (x + 1)^3$$

$$\text{β. } (x - 2)^3$$

$$\text{γ. } (-x + 1)^3$$

$$\text{δ. } (-x - 1)^3$$

$$\text{ε. } (2x + 1)^3$$

$$\text{στ. } (2x - 3)^3$$

$$\text{ζ. } (3 - 2x)^3$$

$$\text{η. } (2\alpha + 3\beta)^3$$

$$\text{θ. } (\kappa^2 - \lambda)^3$$

$$\text{ι. } \left(\frac{1}{2}x + 2\right)^3$$

$$\text{ια. } \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^3$$

$$\text{ιβ. } \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)^3$$

$$\text{ιγ. } \left(x^2 - \frac{y}{3}\right)^3$$

$$\text{ιδ. } (x^2 + 2y^2)^3$$

$$\text{ιε. } \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^3$$

$$\text{ιοστ. } \left(\frac{2}{3}x^2 - 3y^2\right)^3$$

Άθροισμα επί διαφορά / Διαφορά τετραγώνων

4. Να γίνουν οι πράξεις :

$$\text{α. } (x - 9)(x + 9)$$

$$\text{β. } (x + 4)(x - 4)$$

$$\text{γ. } (3 - \alpha)(3 + \alpha)$$

$$\text{δ. } (2\kappa - \lambda)(2\kappa + \lambda)$$

$$\text{ε. } (x + 81)(81 - x)$$

$$\text{στ. } (-x + 2y)(x + 2y)$$

$$\text{ζ. } (-x - 2y)(x + 2y)$$

$$\text{η. } (-x - 2y)(x - 2y)$$

$$\text{θ. } (2x - 3y)(2x + 3y)$$

$$\text{ι. } (x^2 - y)(x^2 + y)$$

$$\text{ια. } (2x^2 - y)(2x^2 + y)$$

$$\text{ιβ. } (\kappa^2 + \lambda^3)(\kappa^2 - \lambda^3)$$

$$\text{ιγ. } (\alpha^3 - 3\beta)(\alpha^3 + 3\beta)$$

$$\text{ιδ. } (\alpha^3 - \beta^3)(\alpha^3 + \beta^3)$$

$$\text{ιε. } (2x^2y + 6)(2x^2y - 6)$$

$$\text{ιοστ. } (3xy^v - \omega^v)(\omega^v + 3xy^v)$$

$$\text{ιζ. } (0,1\alpha + 0,2\beta)(0,1\alpha - 0,2\beta)$$

$$\text{ιη. } (\kappa\lambda + \mu)(\mu - \kappa\lambda)$$

$$\text{ιθ. } (-\alpha^2 - \beta)(-\beta + \alpha^2)$$

5. Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα :

$$\text{α. } \left(\frac{x}{\alpha} + 2\right)\left(\frac{x}{\alpha} - 2\right)$$

$$\text{β. } \left(\frac{x}{11} + \frac{5y}{12}\right)\left(\frac{x}{11} - \frac{5y}{12}\right)$$

$$\text{γ. } \left(-2x + \frac{1}{2}y\right)\left(2x + \frac{1}{2}y\right)$$

$$\text{δ. } \left(2x + \frac{3}{2}y\right)\left(2x - \frac{3}{2}y\right)$$

$$\text{ε. } \left(x^2 + \frac{1}{2}y\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}y\right)$$

$$\text{στ. } (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$$

$$\zeta. (-\sqrt{3x-3y})(-\sqrt{3x+3y}) \quad \eta. (\sqrt{5\alpha}-\sqrt{3\beta})(\sqrt{5\alpha}+\sqrt{3\beta})$$

$$\theta. \left(\frac{1}{4x^2}-\frac{y^3}{3}\right)\left(\frac{1}{4x^2}+\frac{y^3}{3}\right)$$

6. Να υπολογίσετε με το συντομότερο τρόπο το γινόμενο :

$$(3x-2y)(9x^2+4y^2)(3x+2y)$$

Συμπλήρωση Κενών

7. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν ταυτότητες :

α. $(\dots + \dots)^2 = 9x^2 + 12x + \dots$

β. $(\dots - \dots)^2 = 25x^2 - \dots + 4y^2$

γ. $(\dots + \dots)^2 = x^2 + 3x + \dots$

δ. $(\dots - \frac{1}{2})^2 = 16x^4 - 4x + \dots$

ε. $(2\beta - \dots)^2 = \dots - \dots + 36\gamma^2$

στ. $(-\sqrt{2} + \dots)^2 = \dots - \dots + 9x^2y^4$

ζ. $(5 + \dots)(5 - \dots) = \dots - 16x^2$

η. $(2\alpha + \dots)^3 = \dots + 3 \cdot \dots + 3 \cdot \dots + 27$

θ. $x^2 + \dots + 16y^2 = (\dots + \dots)^2$

ι. $\dots + 6\alpha\beta + \beta^2 = (\dots + \dots)^2$

ια. $\dots - 12xy + 9y^2 = (\dots - \dots)^2$

ιβ. $\alpha^2x^4 + \dots + \dots = (\dots + \frac{1}{2}\beta y)^2$

ιγ. $x^{2v} + y^{2v} + \dots = (\dots + \dots)^2$

ιδ. $\dots - 8\alpha^2\beta + \dots = (\alpha + \dots)^2$

ιε. - + - $8y^3 = (10x - \dots)^3$

Παραστάσεις με ταυτότητες

8. Να γίνουν οι πράξεις :

α. $(1 - \alpha)(1 + \alpha) + \alpha^2$

β. $(x^2 - 1)^2 - 1$

γ. $(4\alpha - 3\beta)^2 - 16\alpha^2 - 9\beta^2 + 24\alpha\beta$

δ. $2(x - 5)(x + 5) - (3 - x)^2$

ε. $2(\kappa + 4)^2 - 3(\kappa + 2)(\kappa - 2)$

στ. $2(2 - \beta)^2 - 3(\beta - 2)^2$

ζ. $-9\alpha^2 + (3\alpha + 4\beta)^2 - 24\alpha\beta$

η. $(4x + 5y)^2 + (x + 9y)(x - 9y)$

θ. $(1 - 2x)^2 - x(-x - 1)^2 + (2 - 3x)(2 + 3x)$

ι. $(1 - x)(1 + x) + (x - 2)^2 - (2x + 1)^2$

ια. $2x^3 - (x^2 + 1)(x - 2) + (x - 1)^3$

ιβ. $(x + 2)^2 - 2(x - 1)^2 - 4(x + 1)^2 + 5x^2$

ιγ. $(\alpha - 2\beta)^2 - 3(\alpha - 3\beta)^2 - (2\alpha + 3\beta)(2\alpha - 3\beta)$

ιδ. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} - 2)^2$

ιε. $(x + 3)(5 + 2x)(2x - 5) - 2x(1 - 4x)^2$

9. Ομοίως :

α. $(x + 3)^3 - 3(x + 2)^2 + 3(x + 1)^2 - x^3$

β. $2(x - 1)^3 - (3x + 2)^2 + (5x + 2)(5x - 2)$

- γ.** $(x - 2)^3 - 2x(x + 1)^2 + 3(x + 1)(x - 1)$
- δ.** $(x - 2)^3 - x(3 - 2x)(3 + 2x) + 2x(3 + 2x)^2$
- ε.** $(\alpha^3 + 1)^2 - (\alpha^2 + 1)^3 + 3\alpha^2(\alpha + 1)^2$
- στ.** $(x + 3)^3 - 3(x + 2)^2 + 3(x + 1)^2 - x^3$
- ζ.** $(\alpha + 2\beta)^3 - (2\alpha - \beta)^3 - (\alpha - \beta)^2 \cdot (\alpha + \beta)$
- η.** $(2x + 1)^3 - (3x - 1)^2 + (2x + 8)(2x - 8)$
- θ.** $(2x - 3)^3 - (x + 1)^2 + 3(x - 2)(x + 2) + 5$
- ι.** $(\alpha + \frac{1}{\alpha})^3 - (\alpha - \frac{1}{\alpha})^3$
- ια.** $(2\alpha + 2)^3 - (2\alpha - 2)^3$

10. Ομοίως :

- α.** $(6x^{v-1} + y^{3v})(6x^{v-1} - y^{3v})$
- β.** $(x + y)^3 + 3(x + y)^2(x - y) + 3(x + y)(x - y)^2 + (x - y)^3$
- γ.** $(4x + 3y + 5\omega)^2 - (2x - y + 3\omega)^2 - (x + 3y - 2\omega)^2$
- δ.** $-2x(x - 1)(x + 2) + 3x(3x^2 - 2x)^3 + 5x^2(2x^4 - x)^2$
- ε.** $2\alpha^3(4\alpha^2 + 3)^2 - 5(2\alpha + 1)^3 - 3\alpha(4\alpha^3 - \alpha^2)(4\alpha^3 + \alpha^2)$

11. Εάν $x = 2\sqrt{3} + 1$ και $y = 2\sqrt{3} - 1$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης : $x^2 + y^2 + 2xy$

12. Εάν $x + y = 6$ και $x \cdot y = 8$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

- α.** $x - y$ **β.** $x^2 - y^2$ **γ.** $x^2 + y^2$
- δ.** $(x + 3)(x - 3)$ **ε.** $x^3 + y^3$ **στ.** $(x - y)^2$

ζ. $x^4 + y^4$

13. Εάν $x - y = 5$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης : $A = (x + y)^2 - 4xy$
-

14. Εάν $x + \frac{1}{x} = 4$ τότε να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $x^2 + \frac{1}{x^2}$.
-

15. Αν είναι $x^2 - y^2 = 24$ και $x + y = 6$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων : $x + y$ και xy
-

16. Αν είναι $x^2 + y^2 = 36$ και $x - y = 4$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων : xy , $x + y$, $x^2 - y^2$
-

Αποδεικτικές

17. Να αποδείξετε ότι :

α. $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

β. $(\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha^2$

γ. $(4x + 3y)^2 + (3x - 4y)^2 = 25(x^2 + y^2)$

δ. $(2x + 3y)^2 - (2x - 3y)^2 = 24xy$

ε. $x^2 + (2x + 5)^2 = (x + 4)^2 + (2x + 3)^2$

ε. $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta$

στ. $(2x - y)^2 - (x - 2y)^2 = 3(x + y)(x - y)$

ζ. $(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$

$$\eta. (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

$$\theta. (x^2 + 1)(y^2 + 1) - (xy + 1)^2 = (x - y)^2$$

$$\iota. (\alpha + \beta)^3 - \alpha^3 - \beta^3 = 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\text{ια. } (\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$$

$$\text{ιβ. } \left(\frac{2x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x-y}{2}\right)^2 = 2xy$$

$$\text{ιγ. } \frac{(3\sqrt{7}-1)^2 - (1+3\sqrt{7})^2}{4\sqrt{7}} = -3$$

$$\text{ιδ. } (\alpha + \beta - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma$$

Διάφορες

18. Να απαλειφούν οι ρίζες από τους παρονομαστές :

$$\alpha. \frac{1}{1-\sqrt{3}}$$

$$\beta. \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-7}$$

$$\gamma. \frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$\delta. \frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$$

$$\epsilon. \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

19. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha. (\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$$

$$\beta. 2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$$

$$\gamma. (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \geq (\alpha x + \beta y)^2$$

20. Αν $\alpha + \beta = 5$ και $\alpha\beta = 4$ τότε να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha^2 + \beta^2 \quad \text{και} \quad \alpha^3 + \beta^3$$

21. Αν $\alpha + \beta = 7$ και $\alpha\beta = 10$ τότε να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha^2 + \beta^2 \text{ και } \alpha^4 + \beta^4$$

22. Αν $(x + y)^2 = 2(x^2 + y^2)$, να αποδείξετε ότι : $x = y$
-

23. Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta$, να αποδείξετε ότι : $\alpha = \beta$
-

24. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$, να αποδείξετε ότι :

$$(\tau - \alpha)^2 + (\tau - \beta)^2 + (\tau - \gamma)^2 + \tau^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

25. Αν $x + y = 7$ και $xy = 12$ τότε να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$x^2 + y^2 \text{ και } (x + 2)(y + 2)$$

26. α. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2]$$

- β. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.
-

27. Αν $\alpha^2 + \beta^2 \leq 2\gamma(\alpha + \beta - \gamma)$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές α, β, γ είναι ισόπλευρο.

